

8.3. Средняя плотность свинцового шара и железного куба равна $\rho_1 = 8,9 \text{ г/см}^3$. Чему будет равна средняя плотность ρ_2 железного шара и свинцового куба тех же размеров? Чему равно отношение объемов шара и куба? Плотность свинца $\rho_c = 11,4 \text{ г/см}^3$, плотность железа $\rho_{ж} = 7,8 \text{ г/см}^3$.

Решение.

Пусть V_1 и V_2 – объемы шара и куба соответственно.

Обозначим $\alpha = \frac{V_1}{V_1 + V_2}$, тогда $1 - \alpha = \frac{V_2}{V_1 + V_2}$.

Средняя плотность свинцового шара и железного куба:

$$\rho_1 = \frac{\rho_c V_1 + \rho_{ж} V_2}{V_1 + V_2} = \alpha \rho_c + (1 - \alpha) \rho_{ж}. \quad (1)$$

Раскроем скобки:

$$\rho_1 = \alpha(\rho_c - \rho_{ж}) + \rho_{ж}. \quad (2)$$

Отсюда:

$$\alpha = \frac{\rho_1 - \rho_{ж}}{\rho_c - \rho_{ж}}. \quad (3)$$

Средняя плотность свинцового куба и железного шара:

$$\rho_2 = \frac{\rho_{ж} V_1 + \rho_c V_2}{V_1 + V_2} = \alpha \rho_{ж} + (1 - \alpha) \rho_c = -\alpha(\rho_c - \rho_{ж}) + \rho_c. \quad (4)$$

Сложим уравнения (2) и (4):

$$\begin{aligned} \rho_1 + \rho_2 &= \rho_{ж} + \rho_c; \\ \rho_2 &= \rho_{ж} + \rho_c - \rho_1 = 7,8 + 11,4 - 8,9 = 10,3 \text{ г/см}^3. \end{aligned} \quad (5)$$

Отношение объемов:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\alpha}{1 - \alpha} = \frac{\frac{\rho_1 - \rho_{ж}}{\rho_c - \rho_{ж}}}{1 - \frac{\rho_1 - \rho_{ж}}{\rho_c - \rho_{ж}}} = \frac{\rho_1 - \rho_{ж}}{\rho_c - \rho_{ж} - (\rho_1 - \rho_{ж})} = \frac{\rho_1 - \rho_{ж}}{\rho_c - \rho_1} = \frac{8,9 - 7,8}{11,4 - 8,9} = 0,44 \quad (6)$$

Разбалловка

№	Критерий	Баллы
1	Записано уравнение (1) для средней плотности ρ_1	1
2	Записано выражение (3) для доли объема одной из фигур, или найдены объемы фигур.	3
3	Записано уравнение (4) для средней плотности ρ_2	1
4	Получено выражение (5) для средней плотности ρ_2	1
5	Получен ответ $\rho_2 = 10,3 \text{ г/см}^3$.	1
6	Получено выражение (6) для отношения объемов шара и куба	1
7	Получено значение 0,44 для отношения объемов шара и куба	1
	Сумма	10